BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 517.957

ОДНОМЕРНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА-БЮРГЕРСА ПЯТОГО ПОРЯДКА

М.Н.САДЫХОВ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи с граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений типа Кортевега-де Вриза-Бюргерса пятого порядка. Введены понятия почти всюду и классического решений изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказаны теоремы существования в малом почти всюду и классического решений рассматриваемой смешанной задачи.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, смешанная задача, классическое решение, существование в малом, принципы неподвижных точек.

В работе изучаются вопросы существования и единственности почти всюду и классического решений следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \alpha u_{txxxx}(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad (0 \le t \le T,\ \ 0 \le x \le \pi), \qquad (1) \\ u(0,x) = \varphi(x) \ \ (0 \le x \le \pi), \qquad (2) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \ \ (0 \le t \le T), \qquad (3) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$- фиксированное число; $0 < T < +\infty; F, \varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём почти всюду и классические решения задачи (1)-(3) понимаются в следующих смыслах:

Определение 1. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x), u_{tx}(t,x), u_{txx}(t,x),$

$u_{txxx}(t,x) \in C([0,T]\times[0,\pi])$; $u_{xxxx}(t,x), u_{txxxx}(t,x) \in C([0,T]; L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

Определение 2. Под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

Очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)-(3) является и её решением почти всюду.

Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое решение почти всюду (и, тем более, классическое решение) задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,. \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ искомой функции $u(t,x)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha n^4}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi} \text{☞}(u(\tau,x))\sin nx dx$$

$$(n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx \ \ (n=1,2,...)\,, \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x))\,. \tag{8}$$

Исходя из определений почти всюду и классического решений задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$ - любое решение почти всюду (классическое решение) задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

Далее, с помощью неравенства Беллмана доказываются следующие теоремы о единственности (в целом) почти всюду и классического решений задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_5)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
2. $\forall R>0$ в области $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_5)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_5)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{5}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|, \qquad (9)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_5)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
2. $\forall R>0$ в области $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^5$ выполняется условие (9), где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

Кроме того, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказаны следующие две теоремы о существовании в малом (т. е. справедливые при достаточно малых значениях T) почти всюду и классического решений задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и
$\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$.
2. $F(t,x,u_1,...,u_5)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
3. $\forall R>0$ в области $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_4,u_5)-F(t,x,u_1,...,u_4,\widetilde{u}_5)\right|\le C_R\cdot\left|u_5-\widetilde{u}_5\right|, \qquad (10)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 1. Отметим, что условия 1 теоремы 3, наложенные на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточны для существования решения почти всюду задачи (1)-(3), но и они необходимы.

Теорема 4. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(4)}([0,\pi])$, $\varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и
$\varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0$ $(s=\overline{0,2})$.
2. $F(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_5), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_5)(i=\overline{0,5})\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0)=0$ $\forall\, t\in[0,T], \xi_2,\xi_4\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

Замечание 2. Так как из условия 2 теоремы 4 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 4 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений // Дис…докт.физ.-мат.наук, Баку, Азербайджанский Государственный Университет, 1973, 319 с.
2. Aassila Mohammed. Decay of solutions of some nonlinear equations // Port. Math., 2003, 60, №4, p.389-409.
3. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007, 736 с.
4. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.

BİR SİNİF YARIMXƏTTİ KORTEVEQ-DE VRİZ-BÜRQERS TİPLİ BEŞİNCİ TƏRTİB TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏ

M.N.SADIQOV

XÜLASƏ

İş bir sinif yarımxətti Korteveq-de Vriz-Bürqers tipli beşinci tərtib diferensial tənliklər üçün Rikye tipli sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə və klassik həllərinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə və klassik həllərinin tərifi verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra qoyulan məsələnin həlli axtarılan funksiyanın naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabı qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra, ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə və klassik həllərinin lokal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

Açar sözlər: psevdoparabolik tənlik, qarışıq məsələ, sanki hər yerdə həll, klassik həll, lokal varlıq, tərpənməz nöqtə prinsipləri.

ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF FIFTH ORDER SEMI-LINEAR EQUATIONS OF CORTEVEGUE-DE VRIES-BURGERS TYPE

M.N.SADIKHOV

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of almost everywhere and classical solution of one-dimensional mixed problem with Ricquier type boundary conditions for one class of fifth order semi-linear differential equations of Cortevegue-de Vries-Burgers type. Conceptions of almost everywhere and classical solutions for mixed problem under consideration are introduced. After applying Fourier method, the solution of the original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, by combining the generalized contacted mapping principle and Scauder's fixed point principle, the existence theorems in small for almost everywhere and classical solutions of the mixed problem under consideration are proved.

Key words: pseudoparabolic equation, mixed problem, almost everywhere solution, classical solution, existence in small, fixed point principle.

Поступила в редакцию 18.01.2010 г.
Принято к печати 10.03.2011 г.